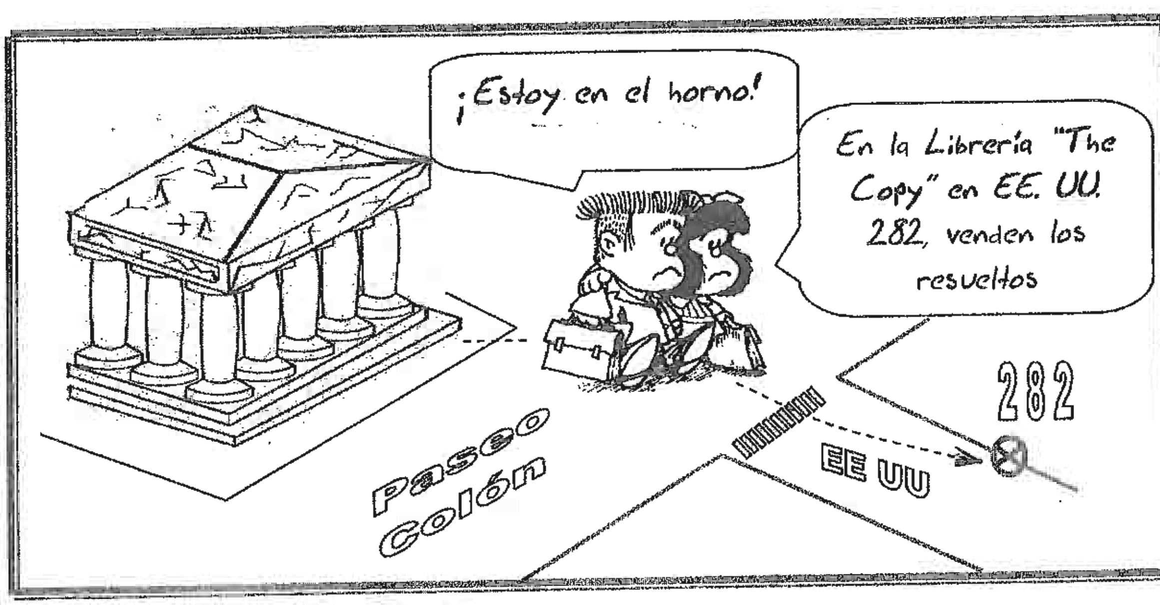
Ejercicios Resueltos 6

Física I

Ondas Mecánicas

-Propagación de ondas – Acústica –

Efecto Döppler -



Ondas Mecánicas

Propagación – acústica - Döppler

Demos algunas definiciones que vamos a usar en esta práctica:

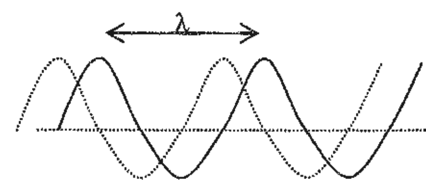
- Una onda es un fenómeno de propagación de una perturbación, asociado a un transporte de energía, pero sin desplazamiento de materia. El ejemplo típico es la ola provocada por la caída de una piedra en el agua, cada punto de la superficie oscila subiendo y bajando mientras pasa la ola, por lo tanto ganan energía cinética y potencial (mecánica), la cual luego pierden cuando se va la ola. La ola se lleva la energía hacia otros puntos.

- Una onda se llama periódica si se repite en el espacio y en el tiempo con las mismas características. Para estas ondas definimos:

① período (T): tiempo que demora un punto material en hacer una oscilación completa (para la ola, en subir y bajar)

② frecuencia (f): cantidad de ciclos que hace el punto por unidad de tiempo.

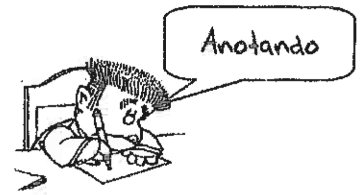
③ longitud de onda (λ): distancia entre dos puntos que oscilan sincronizadamente (es decir que alcanzan el máximo y el mínimo al mismo tiempo)



Por definición, entonces, en un tiempo de un período el cuerpo debe encontrarse en el mismo lugar. Supongamos que se trata de un barco en el mar, entonces si estaba en el punto más alto de la ola ①, luego de un período la ola ② lo tendrá en el punto más alto. Es decir, que la ola ① habrá avanzado una longitud de onda λ. Y por lo tanto, al revés, para que la ola avance una distancia de una λ, se necesita un tiempo de un período.

1. Al mover un bote en un lago tranquilo se producen en éste ondas superficiales. El bote efectúa 12 oscilaciones en 20 segundos y cada oscilación produce una cresta. Para que una

cresta llegue a la orilla situada a 12 *m* del bote se necesitan 6*s*. (a) Calcule la longitud de onda de las ondas superficiales. (b) Escriba la expresión de las ondas superficiales.



Un concepto muy importante que debemos tener presente es que las ondas siempre se propagan con velocidad constante. Como no tienen masa, no se les puede aplicar fuerzas, ni ser aceleradas.

Por lo tanto, la velocidad de propagación o avance se puede sacar conociendo lo que avanza (12 *m*) en cierto tiempo ($\Delta t = 6s$), con la fórmula del MRU:

$$v_{prop.} = \frac{12\,m}{6\,s} = 2\,\tfrac{m}{s}$$

Por otra parte, la cantidad de oscilaciones que hace en los 20 segundos me permiten sacar el período (tiempo para hacer una sola oscilación): $T = \dfrac{20\ seg}{12} = 1{,}\widehat{6}\,s$

La longitud de onda λ se relaciona con magnitudes: $v_{prop.} = \dfrac{\lambda}{T}$ ó $v_{prop.} = \lambda\,.f$

Reemplazo y despejo de la 1ra: $\lambda = v_{prop.}T = 2\tfrac{m}{s}.1{,}\widehat{6}\,s = 3{,}\widehat{3}\ m$. Esta magnitud es la distancia que hay entre dos olas consecutivas.

b) la expresión de esta onda es de la forma de la mostrada en el ejercicio 1. Debemos reemplazar los parámetros propios de este movimiento y dejar como variables la *x* y *t*

Para eso usemos:

(♙) número de onda: $k = \dfrac{2.\pi}{\lambda}$ (♙♙) $k.v_{prop} = \dfrac{2.\pi}{\lambda}.\dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{2.\pi}{T}$

Entonces la ecuación para ondas armónicas unidimensionales se puede poner como:

$$y_{(x,t)} = A.sen\left(\frac{2\pi}{\lambda}.x - \frac{2\pi}{T}.t\right) \xrightarrow{en\ \ nuestro\ \ caso} y_{(x,t)} = A.sen\left(\frac{2\pi}{3{,}\widehat{3}m}.x - \frac{2\pi}{1{,}\widehat{6}s}.t\right)$$

Observación: esta ecuación puede también estar escrita con un coseno, o tener sumados los dos términos dentro del seno. Cuando es este último caso, la onda se está propagando en el sentido negativo del eje *x* (aquí no hemos elegido ninguno, por eso también vale). En cuanto al factor A que figura delante, es el máximo valor que puede tomar verticalmente la perturbación y, por lo tanto es la altura de la ola. En nuestro caso no la conocemos, así que la dejamos como parámetro.

2. La expresión de una cierta onda es $y = 10.sen2\pi\,(2x - 100.t)$, donde x está en metros y t en segundos. Halle (a) la amplitud, (b) la longitud de onda, (c) la frecuencia y (d) la velocidad de propagación. (e) Trace un diagrama de la onda en el que se muestre la amplitud y la longitud de onda.

Comparando con la forma de la ecuación general: $y = A.\,sen\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}.t\right)$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$y = 10.sen(4.\pi\,x - 200.\pi.t)$$

Por lo tanto, la amplitud de la onda vale A = 10, mientras que el factor que multiplica a la x y al tiempo t me permiten despejar:

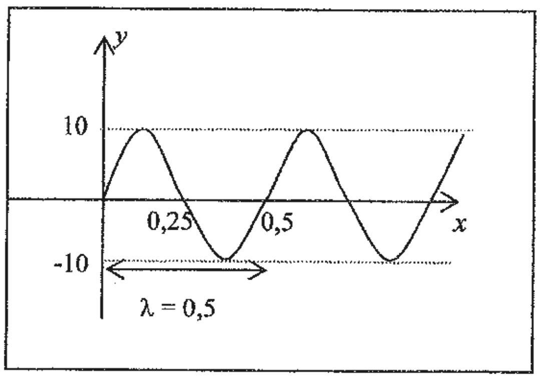
$$\frac{2\pi}{\lambda} = 4\pi \xrightarrow{despejo} \lambda = 0{,}5\ m \qquad\qquad \frac{2\pi}{T} = 200\pi \xrightarrow{despejo} T = 0{,}01\ s$$

La frecuencia entonces la calculamos como la inversa del período: $f = \frac{1}{T} = 100\ hz$

Mientras que para la velocidad de propagación, usamos la relación:

$$v = \lambda.f = 50\,\tfrac{m}{s}$$

Por último, el diagrama pedido es este



3. Dada la onda $y = 2.sen2\pi(0{,}5.x - 10.t)$, donde t está en segundos, x en metros: (a) represente gráficamente $y = f_{(x)}$, en un intervalo de varias longitudes de onda, para $t = 0$ y para t = 0,025 s (b) repita el problema para $y = 2.sen2\pi(0{,}5.x + 10.t)$ y compare los resultados. (c) Suponiendo que la onda corresponde a una onda elástica trasversal, represente gráficamente la velocidad, dy/dt, y la aceleración d^2y/dt^2, en $t = 0$ y $t = T$. (d) ¿Cuánto vale la velocidad de propagación de la onda?

(a) primero obtengamos alguna información de la forma general. Distribuyo y comparo:

$$y = A.sen\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$y = 2.sen(\pi.x - 20.\pi.t)$$

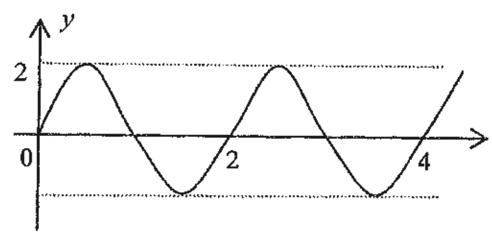
Entonces: $A = 2$; $\frac{2\pi}{\lambda} = \pi$; $\frac{2\pi}{T} = 20.\pi$. De estas igualdades despejo: $\lambda = 2$; $T = 0{,}1$.

Además, podemos sacar la velocidad de propagación de la fórmula: $v_{prop.} = \frac{\lambda}{T} = 20\frac{m}{s}$

Para hacer el diagrama pedido, sacamos una "foto" para $t = 0$; es decir mostramos un diagrama con una imagen congelada a ese instante. Para eso reemplazo en la ecuación y queda:

$$y = 2.sen2\pi(0{,}5.x - 0) \rightarrow y = 2.sen\pi.x$$

La representación de la función $y = 2.sen\pi.x$, se puede hacer empezando en $x = 0$, y dibujando varias longitudes de onda $\lambda = 2$



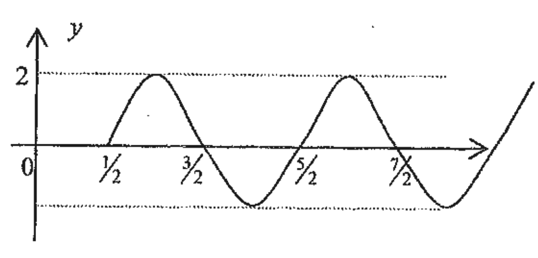
Para $t = 0{,}025$s la ecuación queda:

$$y = 2.sen2\pi(0{,}5x - 0{,}25) \xrightarrow{distribuyo\ \ el\ \ 2\pi} y = 2.sen(\pi.x - \tfrac{\pi}{2})$$

La longitud de onda es la misma que calculamos para el gráfico anterior (ya que λ sólo depende del factor que multiplica a x). Para representar esta función, su gráfico es similar al anterior, ya que se trata de otra función seno, de la misma amplitud $A = 2$, con la misma longitud λ, pero corrida. Para ver donde empieza podemos igualar a cero el argumento dentro del seno:

$$\pi.x - \tfrac{\pi}{2} = 0 \rightarrow x = \tfrac{1}{2}$$

Entonces, la representación de la función $y = 2.sen\left(\pi.x - \frac{\pi}{2}\right)$, se puede hacer empezando en $x = \frac{1}{2}$, y luego sumando varias longitudes de onda.



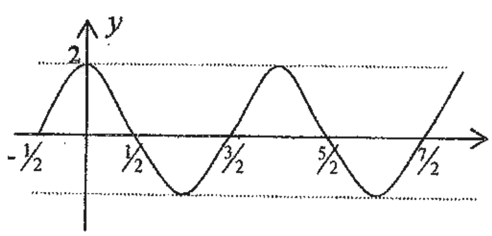
Observar que la gráfica es la misma pero corrida a la derecha en $x = \frac{1}{2}$. Además, de la información que sacamos, observar que el corrimiento hacia la derecha es igual al producto $v.t$ (en efecto, $v_{prop.} = 20$ y $t = 0{,}025$, su producto es el corrimiento)

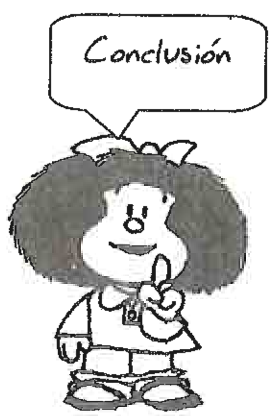
b) para $t = 0$ tenemos la misma función y de esta forma la misma gráfica. Pero en el caso $t =$ 0,025, en cambio, tenemos: $y = 2.sen(\pi.x + \frac{\pi}{2})$. Es decir, la misma función pero con el corrimiento sumando. Para ver adonde se corre el inicio de esta función, igualamos a cero como en la parte (a)

$$\pi.x + \frac{\pi}{2} = 0 \;\rightarrow\; x = -\frac{1}{2}$$

Observar que es el mismo desplazamiento, pero para un x hacia la izquierda.

Entonces, la representación de la función $y = 2.sen\left(\pi.x + \frac{\pi}{2}\right)$, se puede hacer empezando en $x = -\frac{1}{2}$, y luego sumando varias longitudes de onda.





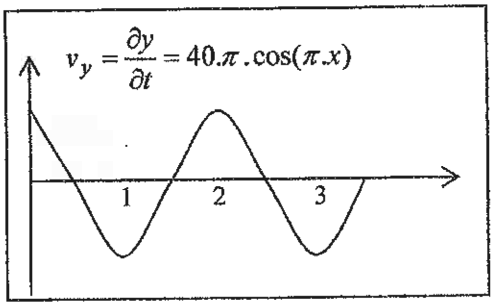
Podemos ver que esta onda se está propagando hacia la izquierda, es decir la posición donde comienza se corre hacia la izquierda cuando transcurre el tiempo

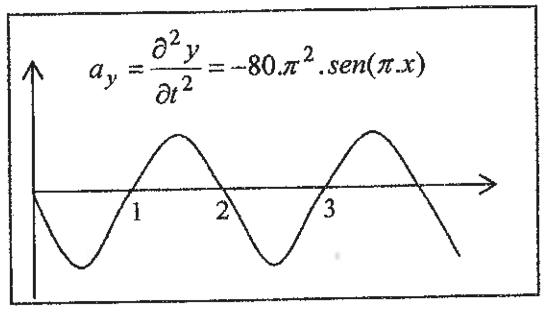
Resumiendo, cuando el término del tiempo aparece restando, la onda se corre hacia la derecha, en cambio si aparece sumando, la onda se propaga hacia la izquierda.

(c) derivamos la ecuación usando la regla de la cadena, respecto al tiempo:

$$\begin{cases} y = 2.sen(\pi.x - 20.\pi.t) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = 40.\pi.\cos(\pi.x - 20.\pi.t) \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -80.\pi^2.sen(\pi.x - 20.\pi.t) \end{cases}$$

Observar que para estas funciones el término que acompaña a la x sigue siendo el mismo, por lo tanto se siguen repitiendo cada $\lambda = 2$. Entonces, para $t = 0$ los gráficos son:





Cuidado con la interpretación de estos gráficos: muchas veces se confunde la velocidad de propagación que tiene la onda (que vale como vimos $v_{prop.} = 20\frac{m}{s}$ y es constante) con la velocidad que acabamos de graficar. Lo que se grafica aquí es la velocidad y aceleración de la oscilación vertical que hace cada punto sobre la onda. Es decir, mientras la onda avanza a velocidad constante en el eje x, cada punto sobre la misma se mueve en el eje y con un Movimiento oscilatorio armónico.

Por último, para $t = T = 0{,}1$s (este valor se encontró al iniciar el problema), se tiene:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 40.\pi.\cos(\pi.x - 2.\pi) \qquad ; \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -80.\pi^2.sen(\pi.x - 2\pi)$$

Como sabemos, al haber un término restando hay un corrimiento en el eje x. Pero como lo que se resta es "2π", esta funciones son iguales a las iniciales con $t = 0$, ya que $40.\pi.\cos(\pi.x - 2.\pi) = 40.\pi.\cos(\pi.x)$. Por lo tanto tenemos los mismos gráficos que antes. Este resultado está de acuerdo con nuestra interpretación del período: como en ese tiempo todos los puntos sobre la superficie de la onda hicieron una oscilación completa vuelven a tener la misma velocidad y aceleración que la inicial.

La velocidad de propagación de la onda la sacamos al iniciar el ejercicio: $v_{prop.} = 20\frac{m}{s}$

4. Dada la ecuación para una onda en una cuerda $y = 0{,}03sen(3x - 2t)$ donde x e y están en metros y t en segundos, (a) en $t = 0$, ¿cuáles son los valores para el desplazamiento en $x = 0$; 0,1 ; 0,2 y 0,3 m? (c) En $x = 0{,}1$ m, ¿cuál es la ecuación para la velocidad de la oscilación de las partículas de la cuerda? (d) ¿Cuál es la velocidad máxima de oscilación? (e) ¿Cuáles es la velocidad de propagación de la onda?

a) reemplazo $t = 0$: $y = 0{,}03 sen(3x)$. Y para cada tiempo obtenemos:

$$y_{(x=0)} = 0{,}03.sen(0) = 0 \quad ; \quad y_{(x=0{,}1)} = 0{,}03.sen(0{,}3) = 8{,}86.10^{-3}$$

$$y_{(x=0{,}2)} = 0{,}03.sen(0{,}6) \cong 0{,}017 \quad ; \quad y_{(x=0{,}3)} = 0{,}03.sen(0{,}9) \cong 0{,}023$$

b) reemplazo en $x = 0{,}1$: $y = 0{,}03\ sen(0{,}3 - 2t)$. Para sacar el desplazamiento para los tres instantes pedidos tengo:

$$y_{(t=0)} = 0{,}03\ sen(0{,}3) \cong 0{,}087 \quad ; \quad y_{(t=0{,}1)} = 0{,}03\ sen(0{,}1) \cong 3.10^{-3}$$

$$y_{(t=0{,}2)} = 0{,}03\ sen(-0{,}1) \cong -3.10^{-3}$$

c) La ecuación para la velocidad de la oscilación se saca derivando la expresión general de y respecto al tiempo:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -0{,}06\ \cos(3.x - 2.t)$$

Esta es una función que depende de x y de t (o sea de qué punto de la onda y en que instante se considere).

d) El valor máximo de esta función es como para toda función trigonométrica, el factor que lo multiplica. Así, la mayor v_y posible es 0,06 .

e) La velocidad de propagación de la onda se puede buscar obteniendo como hacemos siempre, comparo la ecuación de nuestra onda con la forma general:

$$y = A.\ sen\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$y = 0{,}03.sen(3.x - 2.t)$$

Entonces, igualo y despejo: $\frac{2\pi}{\lambda} = 3 \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{T} = 2 \rightarrow \lambda = \pi$

Finalmente, despejo con la fórmula: $v_{prop.} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2}{3}.\pi}{\pi} = 0,\widehat{6}\,\frac{m}{s}$

5. El extremo de una cuerda estirada se ve forzado a vibrar con un desplazamiento dado por la ecuación y = 0,1 sen(6.t), donde y está en metros y t en segundos. La tensión en la cuerda es de 4 N y su masa por unidad de longitud es de 0,010 kg/m. Calcule (a) la velocidad de las ondas en la cuerda, (b) su frecuencia, (c) la longitud de onda y (d) la ecuación del desplazamiento de un punto que se encuentra a 1 m de la fuente y de otro a 3m de la fuente.

a) usamos la expresión conocida de la velocidad de propagación de las ondas trasversales:

$$v_{prop.} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \xrightarrow{datos:\ \mu=0{,}01\ ;\ T=4} v_{prop.} = \sqrt{\frac{4}{0{,}01}} \cong 20\,\frac{m}{s}$$

b) para calcular la frecuencia debemos usar la ecuación del MOAS que realiza el extremo (que podemos decir que se ubica en $x = 0$). Por comparación con la ecuación general de la onda, sabemos que el término que acompaña a "t" dentro del seno es:

$$y = A.sen\left(\frac{2\pi}{\lambda}.x + 2.\pi.f.t\right) = 0{,}1.sen(6.t) \rightarrow A = 0{,}1\,m\ ;\ \ 2.\pi.f = 6$$

De esta última expresión despejamos el valor de la frecuencia: $f \cong 0{,}955\,hz$

c) con los datos hallados: $v_{prop.} = \lambda.f \xrightarrow{despejo} \lambda = \frac{v_{prop.}}{f} = \frac{20\frac{m}{s}}{0{,}955\frac{1}{s}} \cong 21m$

d) ahora, a la ecuación de la oscilación temporal le agregamos la parte "espacial" que depende de x:

$$y = A.sen(\frac{2\pi}{\lambda}.x + \underbrace{2.\pi.f}_{6}.t) \xrightarrow{datos} y_{(x=1)} = 0{,}1m.sen(\frac{2\pi}{21}.1 + 6.t) = 0{,}1m.sen(0{,}3 + 6.t)$$

De la misma forma para la otra posición:

$$y_{(x=3)} = 0{,}1m.sen(\frac{2\pi}{21}.3 + 6.t) = 0{,}1m.sen(0{,}9 + 6.t)$$

6. Una onda sinusoidal trasversal con A = 5,00 mm y λ=3,60 m viaja de izquierda a derecha por un hilo estirado horizontal a v = 24,0 m/s. Tome como origen el extremo izquierdo del hilo no perturbado. En t = 0, el extremo izquierdo del hilo está en el origen y se mueve hacia abajo.

a) Calcular la frecuencia y el número de onda.

b) Escribir la ecuación de la onda

c) Escribir la ecuación de movimiento del extremo izquierdo del hilo

d) Escribir la ecuación de movimiento de una partícula ubicada a 0,90 m a la derecha del origen

e) Calcular la velocidad transversal máxima de cualquier partícula del hilo

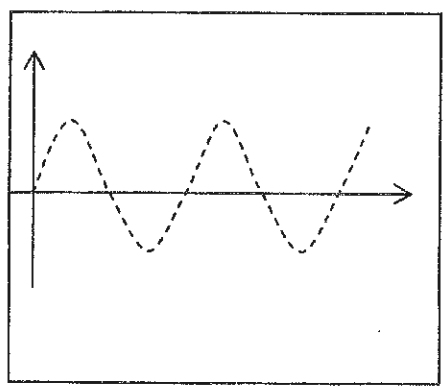
f) Calcular la velocidad y el desplazamiento de una partícula ubicada a 0,90 m a la derecha del origen para $t = 0{,}05s$

a) Con el dato de la longitud de onda saco el número de onda: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3{,}6m} \cong 1{,}75\,m^{-1}$

Y también podemos sacar la frecuencia de la expresión:

$$v_{prop.} = \lambda.f \xrightarrow{despejo} f = \frac{24\,\frac{m}{s}}{3{,}6\,m} = 6{,}\widehat{6}\ \frac{1}{s}$$

b) reemplazamos en la expresión general de la onda, cuidando de poner un signo menos en el término temporal ya que la onda se propaga hacia la derecha (ver conclusiones del problema 3)



$$y = A.sen(k.x - 2.\pi.f.t + \varphi_o) \xrightarrow{datos}$$

$$y = 5\,mm.\ sen\left(1{,}75\,\tfrac{1}{m}\,x - 41{,}9\,\tfrac{1}{s}\,t + \varphi_o\right)$$

Donde φ_o es el ángulo de fase inicial que necesitamos para dar con exactitud la oscilación del hilo. Para encontrar esta fase, tengamos en cuenta que en t = 0, el extremo izquierdo (x = 0) se encuentra en el origen (y = 0),y con velocidad hacia abajo (v_y < 0). Por lo tanto, reemplazando en la ecuación que acabamos de escribir:

$$y = 5\,mm\,.\,sen(\varphi_o) = 0 \;\rightarrow\; \varphi_o = 0 \;\text{ó}\; \pi$$

Analizo el signo de la velocidad de la oscilación del extremo izquierdo para cada una de estas soluciones. Para eso sacamos v_y derivando:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = 5\,mm\,.\cos\left(1{,}75\frac{1}{m}x - 41{,}9\frac{1}{s}t + \varphi_o\right)\left(-41{,}9\frac{1}{s}\right) \xrightarrow{x=0,\,t=0} v_y = -20{,}9\frac{cm}{s}.\cos(\varphi_o)$$

Si en esta igualdad uso $\varphi_o = 0$, entonces $\cos(\varphi_o) = 1$ y la velocidad inicial da negativa, como pide el enunciado. En cambio, si usara $\varphi_o = \pi$, la velocidad inicial daría positiva.

Con esto completamos la ecuación de la onda: $y = 5\,mm\,.\,sen\left(1{,}75\frac{1}{m}x - 41{,}9\frac{1}{s}t\right)$

c) el extremo izquierdo del hilo es el que se encuentra en el origen $x = 0$. Basta reemplazar entonces este valor en la ecuación general de la onda:

$$y = 5\,mm\,.\,sen\left(-41{,}9\frac{1}{s}t\right) \xrightarrow{sen(-p)=-sen(p)} y = -5\,mm\,.\,sen\left(41{,}9\frac{1}{s}t\right)$$

Esta es la ecuación del MOAS que ejecuta el punto extremo izquierdo del hilo.

d) reemplazo $x = 0{,}9\,m$: $y = 5\,mm\,.\,sen\left(1{,}575 - 41{,}9\frac{1}{s}t\right)$

Esta también es la ecuación de un MOAS pero está desfasado respecto al que ejecuta el punto extremo izquierdo del hilo (dentro del seno aparece sumando una constante "1,757" que es la fase inicial de este punto).

e) la máxima v_y es el factor está delante de la expresión de la velocidad transversal que encontramos arriba y que multiplica al coseno:

$$v_y = \overbrace{-20{,}9\frac{cm}{s}}^{v_{y,máx}}.\cos\left(1{,}75\frac{1}{m}x - 41{,}9\frac{1}{s}t\right) \;\rightarrow\; v_{y,máx} = 20{,}9\frac{cm}{s}$$

f) Para $t = 0{,}05\,s$, el desplazamiento y la velocidad se obtienen reemplazando:

$$y = 5\,mm\,.\,sen\left(1{,}75\frac{1}{m}x - 41{,}9\frac{1}{s}t\right) \xrightarrow{x=0{,}9\,;\,t=0{,}05} y = 5\,mm\,.\,sen(-0{,}52) \cong -2{,}5\,mm$$

$$v_y = -20{,}9\,\tfrac{cm}{s}\,.\,\cos\left(1{,}75\,\tfrac{1}{m}\,x - 41{,}9\,\tfrac{1}{s}\,t\right)$$

$$\xrightarrow{x=0{,}9\,;\,t=0{,}05} \quad v_y = -20{,}9\,\tfrac{cm}{s}\,.\,\cos(-0{,}52) \cong -18{,}1\,\tfrac{cm}{s}$$

7. La velocidad de propagación de las ondas transversales en una cuerda tensa es de 10 m/seg. El desplazamiento transversal en $x = 0\ m$, principio de la cuerda, es $y_{(t)} = 0{,}1.(t^2 - t^3)\ m$, cuando $0\ s < t < 1\ s$. Para los restantes valores de t: $y_{(t,\ 0)} = 0\ m$

a. Representar gráficamente el desplazamiento de un pulso transversal en función del tiempo en $x = 0\ m$.

b. Idem anterior pero en función de x, en $t = 1\ s$

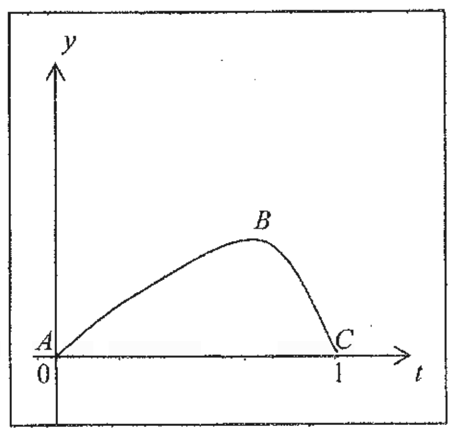
c. ¿Cuál es la expresión matemática del desplazamiento en función del tiempo en $x = 10\ m$?

d. ¿Cuál es la velocidad trasversal de la partícula en $x = 10\ m$ y $t = 1{,}5\ s$?

e. ¿Cuál es la pendiente de la cuerda en $x = 10\ m$ y $t = 1{,}5\ s$?

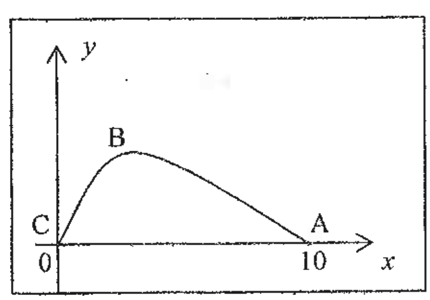
a) La representación que piden es la de la función $y_{(t)} = 0{,}1.\,(t^2 - t^3) = 0{,}1.t^2.(1 - t)$, para $0 < t < 1\ s$, y es nula fuera de ese intervalo.

No hace falta usar análisis, basta con tomar algunos valores de t para darnos cuenta que se trata de una función positiva y que se anula en los bordes (de todos modos, derivando se saca que tiene un máximo en $t = \frac{2}{3}\ seg$).



Este gráfico representa como se mueve el punto $x = 0\ m$ (o sea el origen de la cuerda) en función del tiempo. Este pulso que perturba el origen se irá propagando por la cuerda hacia la derecha con velocidad de propagación de $v = 10\ m/seg$.

b) El gráfico que nos piden aquí se hace a partir del anterior. En $t = 1\ seg$ el punto A del pulso ha viajado hasta $x = 10\ m$ (porque viaja a $v = 10$ m/s) Y en el origen $x = 0\ m$ lo que está ocurriendo es la parte final del pulso punto C (porque justamente es lo que pasaba en el origen para $t = 1$s)



Para orientarnos, marqué tres puntos A, B y C del pulso original, y luego en el 2do gráfico mostré como se encuentra cada uno para $t = 1$ *seg*. De todas maneras, en el punto siguiente te muestro como generalizar la perturbación al propagarse espacialmente.

c) La ecuación de la perturbación general se puede obtener cambiando "t" por "$t - x/v$", que representa el retraso en un tiempo x/v, que es el tiempo que demora el pulso en llegar al punto x viajando a la velocidad constante $v = 10$ *m/seg*. Así, para la expresión general se tendrá:

$$y_{(x,t)} = 0{,}1.\,((t - x/10)^2 - (t - x/10)^3) \qquad \text{con} \qquad 0 < (t - x/10) < 1$$

Y luego de eso será nulo.

Para $t = 1$ s: $\quad y_{(x,t)} = 0{,}1.\,((1 - x/10)^2 - (1 - x/10)^3)$ $\quad$ Esta es la función representada en b)

Para el punto $x = 10$ m: $\quad y_{(x,t)} = 0{,}1.\,((t - 1)^2 - (t - 1)^3) \qquad \text{con} \quad \overbrace{0 < t-1 < 1}^{1<t<2}$

La perturbación es nula para todo instante posterior a $t = 2$ *seg*, lo que expresa el hecho de que el pulso ya pasó de largo por el punto $x = 10$ m. Es decir, esto representa el mismo pulso que hizo bailar el origen en el instante inicial, y que demora 1 *seg* en llegar al punto $x = 10$ m y hacerlo bailar. Ese tiempo de 1 *seg* es el que emplea el pulso en ir del origen hasta x viajando a 10 *m/seg*. Para ese punto sacamos los desplazamientos pedidos reemplazando en la ecuación encontrada:

$$\xrightarrow{x=10\ ;\ t=1} y = 0 \quad ; \quad \xrightarrow{x=10\ ;\ t=1{,}5} y = 0{,}0125\ m \quad ; \quad \xrightarrow{x=10\ ;\ t=3} y = 0$$

Referido a este último resultado, el valor es directamente cero porque $t = 3$ s está fuera del intervalo de la expresión, así que cuidado de no reemplazar.

d) La velocidad transversal de la partícula es la velocidad con que la misma sube (o baja) verticalmente. Se obtiene derivando respecto a t la posición y de la perturbación (atención, es una derivada parcial respecto a t, es decir que x se toma constante):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0{,}1.\left(2\,.\,(t - x/10) - 3\,.\,(t - x/10)^2 \right)$$

Reemplazo: $\xrightarrow{x=10\,m\ ;\ t=1,5\,seg}$ $\dfrac{\partial y}{\partial t} = 0{,}1.\,(\,2\,.\,\overbrace{(t - x/_{10})}^{0,5} - 3.\,\overbrace{(t - x/_{10})}^{=,5}{}^{2}\,) = -0{,}05\ m/_{seg}$

El signo de esta velocidad nos indica que la partícula se encuentra bajando en ese momento.

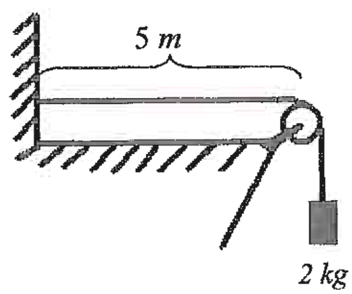
e) La pendiente de la cuerda se obtiene como la derivada del desplazamiento vertical "y" respecto del desplazamiento horizontal "x". Es decir, se trata de la inclinación que tiene la cuerda tomando una fotografía a t fijo (a su vez esto corresponde a derivar en forma parcial respecto a "x"). Uso la regla de la cadena:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0{,}1.\left(2\,.(t - x/_{10})\,.(-1/_{10}) - 3.\,(t - x/_{10})^2\,.(-1/_{10})\right) = -0{,}01.\left(2.(t - x/_{10}) \;\; - 3.\,(t - x/_{10})^2\right)$$

Reemplazo: $\xrightarrow{x=10\,m\ ;\ t=1,5\,seg}$ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -0{,}01.(2.\overbrace{(t - x/_{10})}^{0,5} \; - 3.\,\overbrace{(t - x/_{10})}^{0,5}{}^{2}\,) = 0{,}005$

Atención las unidades, esto es la pendiente de una curva, no tiene por lo tanto unidades (no es como la derivada anterior, que se trataba de una velocidad).

8. Una cuerda está atada por un extremo a un punto fijo. El otro pasa por una polea que se encuentra a 5 m del extremo fijo y lleva una carga de 2 kg. La masa del segmento de cuerda comprendido entre el extremo fijo y la polea es de 0,6 kg. (a) Encuentre la velocidad de propagación de las ondas transversales a lo largo de la cuerda. (b) Suponga que una onda armónica de 10^{-3} m de amplitud y 0,3 m de longitud se propaga por la cuerda; halle la velocidad transversal máxima de cualquier punto de la cuerda. (c) Escriba la ecuación de onda (d) Determine la intensidad de la onda en un punto



a) con los datos determino la expresión de la tensión de la cuerda que es un parámetro necesario para la velocidad con que se propagan las ondas ***transversales*** por la misma, ya que se cumple que:

$$v_{prop.} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Donde $\mu = \frac{masa}{long} = \frac{0{,}6\,kg}{5\,m} = 0{,}12\,\frac{kg}{m}$ es la densidad lineal de la soga, mientras que T es la tensión de la cuerda, que en este caso coincide con el peso $P = M.g = 19{,}6$ N

De esta forma la velocidad de propagación será: $v_{prop.} = \sqrt{\frac{19{,}6\,N}{0{,}12\,kg}} \cong 12{,}8\,\frac{m}{s}$

b) primero determinemos la frecuencia:

$$v_{prop.} = \lambda.f \xrightarrow{despejo} f = \frac{v_{prop.}}{\lambda} = \frac{12{,}8\,\frac{m}{s}}{0{,}3m} = 42{,}6\,\frac{1}{s}$$

Derivando la expresión general de una oscilación armónica, respecto del tiempo, se obtiene la expresión de la velocidad:

$$y = A.sen\left(\frac{2\pi}{\lambda}.x - 2\pi.f.t\right) \xrightarrow{derivo} v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\overbrace{A.2\pi.f}^{(\text{A})}.\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}.x - 2\pi.f.t\right)$$

Como el coseno oscila entre −1 y 1, por lo tanto la expresión (A) que figura delante nos da el mayor valor que puede alcanzar la velocidad de un punto en su oscilación. Tenemos:

$$v_{máx} = 2.\pi.f.A \xrightarrow{datos} 2.3{,}14.42{,}6\,\frac{1}{s}.\,1.10^{-3}\,m \cong 0{,}268\,\frac{m}{s}$$

c) reemplazo en la forma general de la onda transversal:

$$y = A.sen\left(\frac{2\pi}{\lambda}.x - 2\pi.f.t\right) \rightarrow y = 1.10^{-3}\,m.sen\left(\frac{2\pi}{0{,}3m}.x - 2\pi.42{,}6\,\frac{1}{s}.t\right)$$

d) la intensidad es la potencia media del flujo de energía asociada a una onda armónica y se puede demostrar que vale:

$$\overline{P} = \frac{\overline{E}}{t} = \frac{1}{2}.\mu.v_{prop}.(2.\pi.f.A)^2 \rightarrow \frac{\overline{E}}{S.t} = \frac{\frac{1}{2}.\mu.v_{prop}.(2.\pi.f.A)^2}{S}$$

Como no tenemos la sección S de la cuerda, sólo podemos resolver el numerador y dejarla expresada como:

$$\frac{\overline{E}}{S.t} = \frac{\frac{1}{2}.\mu.v_{prop}.(2.\pi.f.A)^2}{S} = \frac{0{,}055\,w}{S}$$

9. Una onda longitudinal con $f = 400$ Hz viaja por una varilla de aluminio de 0,900 cm de radio. La potencia media de la onda es de 5,50 μW

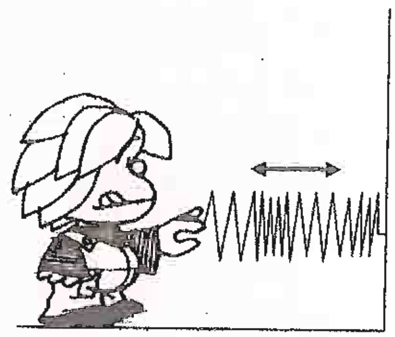
a) Calcular la longitud de la onda

b) determinar la amplitud de la onda

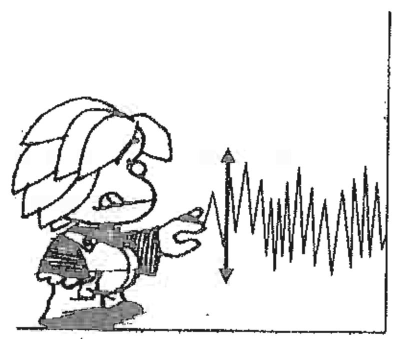
c) Determinar la velocidad longitudinal máxima de una partícula de la varilla.

Para hacer este ejercicio es necesario conocer un poco de teoría. En los medios elásticos pueden propagarse dos tipos de ondas:

① longitudinales: cada punto del medio oscila en la misma dirección de la propagación de la onda. Se la puede comparar con las ondas que se producen en un resorte, donde cada "rulito" avanza y retrocede alrededor del punto de equilibrio, mientras que la onda o perturbación avanza por el resorte. Es decir ambas cosas se mueven en el eje x. Para lograrlas, Miguelito debe hacer avanzar y retroceder la mano



② transversales: cada punto del medio oscila en forma perpendicular a la dirección de la propagación de la onda. También se la puede comparar con las ondas que se producen en un resorte, donde cada "rulito" sube y baja alrededor del punto de equilibrio, mientras que la onda o perturbación avanza horizontalmente por el resorte. Para lograrlas, Miguelito debe hacer subir y bajar la mano.



De este último tipo es la onda superficial en el agua.

Cuando trabajamos con una varilla de material, se pueden propagar cualquiera de los dos tipos de ondas (el comportamiento elástico de la varilla se asemeja a un resorte que vibra en cualquiera de las formas vistas arriba). Para las ondas longitudinales, la velocidad de propagación depende del material a través de un coeficiente específico:

$$v_{prop.} = \sqrt{\frac{Y}{\delta}}$$

Donde Y es el módulo de Young del material y δ es su densidad. En el problema, como la varilla es de aluminio, podemos usar la tabla de la guía, para sacar:

$$v_{prop.} = \sqrt{\frac{0{,}7.10^{11}\,\frac{N}{m^2}}{2{,}70.10^3\,\frac{kg}{m^3}}} \cong 5092\,\frac{m}{s}$$

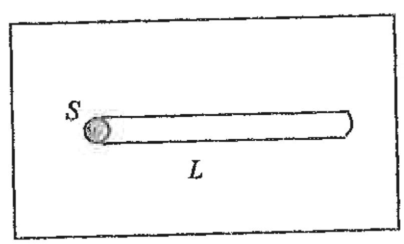
Y con este valor despejamos: $v_{prop.} = \lambda.f \rightarrow \lambda = \frac{v_{prop.}}{f} = \frac{5092\,\frac{m}{s}}{400\,\frac{1}{s}} = 12{,}7\,\frac{m}{s}$

b) la potencia media que trasmite una onda por una varilla como en este problema se puede pensar como la cantidad de energía por unidad de tiempo que adquieren los puntos de la varilla al producirse la oscilación. La palabra media hace referencia a que como los puntos oscilan en un MOAS la velocidad con que oscilan no es constante, y por lo tanto se saca una especie de promedio para un período de tiempo. Se puede probar entonces que esta potencia media puede ponerse como:

$$\overline{P} = \frac{1}{2}.\mu.v_{prop}.(v_{\max})^2 \qquad ó \qquad \overline{P} = \frac{1}{2}.\mu.v_{prop}.(2.\pi.f.A)^2$$

Donde $\mu = \frac{masa}{long}$ es la densidad lineal de la varilla, A es la amplitud de la oscilación, y $v_{máx}$ es la velocidad máxima que alcanza cada punto de la varilla en la oscilación, mientras que $v_{prop.}$ es la velocidad con que se propaga la onda.

En nuestro caso, la densidad lineal de masa se puede poner como: $\mu = \frac{Masa}{long} = \frac{\delta.\overbrace{S.L}^{Vol}}{L} = \delta.S$, es decir como el producto de la densidad del material por la sección trasversal de la varilla.



Si reemplazamos los datos en la expresión de la potencia:

$$\overline{P} = \frac{1}{2}.\delta.S.v_{prop}.(2.\pi.f.A)^2 \xrightarrow{datos}$$

$$5{,}5.10^{-6}\,w = \overbrace{\tfrac{1}{2}.2{,}7.10^{3}\,\tfrac{kg}{m^{3}}.(\underbrace{\pi.(9.10^{-3}\,m)^{2}}_{\pi.R^{2}=S}).5092\tfrac{m}{s}}^{cuenta:\ 1749}.(2.\pi.f.A)^{2}$$

$$\xrightarrow{despejo} \sqrt{\frac{5{,}5.10^{-6}}{1749}} = 2.\pi.f.A \;\rightarrow\; A = \frac{5{,}61.10^{-5}}{2.\pi.400} = 2{,}23.10^{-8}\,m$$

c) esta velocidad que nos piden puede obtenerse con la primera expresión de la potencia, aunque es más fácil asociarla con la amplitud, mediante la expresión que se saca de la derivada de la ecuación de onda respecto al tiempo:

$$y = A.sen(kx - 2.\pi.f\,t) \;\rightarrow\; v_y = -\underbrace{2.\pi.f.A}_{v_{máx}}.\cos(kx - 2.\pi.f\,t)$$

El factor delante del coseno es el valor máximo que puede tomar la función velocidad:

$$v_{máx} = 2.\pi.f.A = 2.3{,}14.400\tfrac{1}{s}.2{,}23.10^{-8}\,m \cong\; 5{,}6.10^{-5}\,\tfrac{m}{s}$$

10. Un cable de acero de 2 m de longitud y 5.10^{-4} m de radio cuelga del techo. (a) Si se cuelga un cuerpo de 100 kg de masa del extremo libre, calcule el alargamiento del cable. (b) determine también el desplazamiento y la tracción hacia abajo en el punto medio del cable (c) Determine la velocidad de las ondas longitudinales y transversales que pueden viajar por el cable cuando el cuerpo está colgando del cable.

Para un cuerpo elástico, se define su módulo de Young como el cociente entre el valor de la fuerza que recibe por unidad de área y la deformación relativa que se le provoca al cuerpo:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta l/L}$$

Este módulo es un equivalente a la constante elástica de un resorte, ya que estima la facilidad a deformarse estirándose o comprimiéndose ante la aplicación de fuerzas. En nuestro caso la fuerza aplicada al cable de acero es el peso del cuerpo que cuelga, el área es la sección del cable, y L es la longitud total del cable. Por lo tanto:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta l/L} \xrightarrow{despejo} \Delta l = \frac{100kg.9{,}8\frac{m}{s^2} \Big/ \pi.(5.10^{-4}\,m)^2}{Y_{acero}}.(2\,m) \cong 0{,}0125\,m$$

b) para calcular la tracción a la que está sometida el punto medio de la barra, debemos pensar que la mitad superior está soportando el peso que cuelga más el de la mitad inferior de la barra.

$$M_{\frac{1}{2}barra} = \delta_{acero}.Vol = 7{,}8.10^3\,\frac{kg}{m^3}.1m\ .\pi.(5.10^{-4}\,m)^2 \cong 6.10^{-3}\ kg$$

Como vemos, la cuenta de la masa de dicha mitad es mucho menor que la que cuelga, por lo tanto podemos despreciarla y decir que sigue siendo el peso de los 100 *kg*. Para el alargamiento, usamos la definición del módulo de Young:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta l/L} \xrightarrow{despejo} \Delta l = \frac{100kg.9{,}8\frac{m}{s^2} \Big/ \pi.(5.10^{-4}\,m)^2}{Y_{acero}}.(1\,m) \cong 6{,}25.10^{-3}\ m$$

c) para las ondas transversales la velocidad de propagación se calcula con la expresión:

$$v_{prop.} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{M.g}{\delta_{acero}.S}} \xrightarrow{reemplazo} \sqrt{\frac{980\,N}{7{,}8.10^3\,\frac{kg}{m^3}.\pi.(5.10^{-4}\,m)^2}} \cong 400\,\frac{m}{s}$$

Mientras que para las longitudinales

$$v_{prop.} = \sqrt{\frac{Y_{acero}}{\delta_{acero}}} = \sqrt{\frac{2.10^{11}\,\frac{N}{m^2}}{7{,}8.10^3\,\frac{kg}{m^3}}} = 5063\,\frac{m}{s}$$

11. Una varilla delgada de acero está forzada a transmitir ondas longitudinales mediante un oscilador acoplado a uno de sus extremos. La varilla tiene un diámetro de $4x10^{-3}$m. La amplitud de las oscilaciones es de 10^{-4} m y su frecuencia de 10 Hz.
Halle: (a) la ecuación de las ondas en la varilla (b) la energía por unidad de volumen de la onda (c) el flujo medio de energía por unidad de tiempo a través de cualquier sección transversal de la varilla y (d) la potencia necesaria para operar el oscilador.

a) calculo la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en la varilla de acero. Como en los problemas anteriores, se obtiene de la expresión:

$$v_{prop.} = \sqrt{\frac{Y_{acero}}{\delta_{acero}}} = \sqrt{\frac{2.10^{11}\,\frac{N}{m^2}}{7{,}8.10^3\,\frac{kg}{m^3}}} = 5063\,\frac{m}{s}$$

Y con la frecuencia de la oscilación, buscamos la longitud de onda:

$$v_{prop.} = \lambda.f \xrightarrow{despejo} \lambda = \frac{v_{prop.}}{f} = \frac{5063\,\frac{m}{s}}{10\,\frac{1}{s}} \cong 506{,}3\,m$$

Reemplazo en la ecuación general de las ondas:

$$y = A.sen(\tfrac{2\pi}{\lambda}.x - 2\pi.f.t) \xrightarrow{datos} y = 1.10^{-4}\,m.sen(\tfrac{2\pi}{506{,}3m}.x - 2\pi.10\tfrac{1}{s}.t)$$

Aunque a la variable del apartamiento la llamamos "*y*", es conveniente recordar que se trata de oscilaciones en el mismo sentido de la barra (son longitudinales)

b) para sacar la energía por unidad de volumen, calculamos la energía de la oscilación de la barra, que viene dada por: $E = \frac{1}{2}.M.(2\pi.f)^2.A^2$

Y la divido por el volumen:

$$\frac{E}{V} = \frac{\frac{1}{2}.M.(2\pi.f.A)^2}{V} = \frac{\frac{1}{2}.\delta.V.(2\pi.f.A)^2}{V} = \frac{1}{2}.\delta.(2\pi.f)^2.A^2 \cong 0{,}15\,\frac{joule}{m^3}$$

c) y para la potencia que se transmite por unidad de área (esta magnitud se la suele llamar intensidad de la onda, es la energía por unidad de tiempo y de área que se transmite en la oscilación), tenemos la expresión que vimos en el ejercicio 8:

$$I = \frac{\overline{E}}{S.t} = \frac{\frac{1}{2}.\mu.v_{prop}.(2.\pi.f.A)^2}{S} \xrightarrow{\mu=\frac{M}{L}=\delta.S} I = \frac{\frac{1}{2}.\delta.\cancel{S}.v_{prop}.(2.\pi.f.A)^2}{\cancel{S}}$$

Con nuestros datos:

$$I = \frac{1}{2}.7{,}8.10^3\,\frac{kg}{m^3}.5063.\left(2.\pi.10\tfrac{1}{s}.10^{-4}\,m\right)^2 \cong 0{,}01\,watts$$

12. El sonido más débil que se puede percibir tiene una amplitud de presión de 2.10^{-5} N/m^2 y el más fuerte sin que cause dolor tiene una amplitud de presión de 20 N/m^2, aproximadamente. En cada caso determine (a) la intensidad del sonido en W/m^2 y en dB y (b) la amplitud de las oscilaciones, si la frecuencia es de 500 hz. Suponga que la densidad del aire es 1,29 kg/m^3 y la velocidad del sonido de 345 m/s

Para las ondas sonoras, su intensidad se puede poner como $I = \dfrac{(\Delta P)^2}{2.\delta.v_{prop}}$

Donde ΔP es la amplitud de las ondas de presión causantes del sonido. Si reemplazamos los datos:

$$I = \frac{(\Delta P)^2}{2.\delta.v_{prop}} = \frac{(2.10^{-5}\,Pa)^2}{2.1{,}29\,\frac{kg}{m^3}.345\,\frac{m}{s}} \cong 4{,}5.10^{-13}\,\frac{W}{m^2}$$

Esta es la intensidad del sonido más débil. Para el más fuerte tenemos:

$$I = \frac{(\Delta P)^2}{2.\delta.v_{prop}} = \frac{(20\;Pa)^2}{2.1{,}29\frac{kg}{m^3}.345\frac{m}{s}} \cong 0{,}45\,\frac{W}{m^2}$$

Como vemos la diferencia de intensidad de sonido audible (entre el más tenue y el que provoca dolor) es muy grande, más de un millón de millones de veces. Esto hace que se use una escala para comparar intensidades llamada "decibeles", que se define como:

$$N_{(dB)} = 10.\log_{10}\left(\frac{I}{1.10^{-12}\,W/m^2}\right)$$

Esta cantidad es un número sin dimensiones, pero se agrega la palabra decibeles al resultado de esta cuenta. Es una especie de comparación de la intensidad del sonido I y un valor de referencia $I_o = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$ (que es aceptado como la intensidad umbral o mínima que escucha el oído humano, promediado para todas las edades y frecuencias).

Para los valores hallados antes de intensidad:

$$N_{(dB)} = 10.\log_{10}\left(\frac{4{,}5.10^{-13}\,W/m^2}{1.10^{-12}\,W/m^2}\right) = -3{,}46\;dB$$

Y
$$N_{(dB)} = 10.\log_{10}\left(\frac{0{,}45\,{}^{W}/_{m^2}}{1.10^{-12}\,{}^{W}/_{m^2}}\right) = 116{,}5\ dB$$

Observación: el crecimiento en decibeles es bastante menor que el de la intensidad I

b) para sacar las amplitudes de las oscilaciones, usamos la expresión que presentamos en el ejercicio anterior:

$$y_m = \frac{\Delta P}{v_{prop}.\delta.(2.\pi.f)} = \begin{cases} \dfrac{2.10^{-5}\,\frac{N}{m^2}}{345\frac{m}{s}.1{,}29\frac{kg}{m^3}.(2.\pi.500\,hz)} \approx 1{,}43.10^{-11}\,m \\[2ex] \dfrac{20\,\frac{N}{m^2}}{345\frac{m}{s}.1{,}29\frac{kg}{m^3}.(2.\pi.500\,hz)} \approx 1{,}43.10^{-5}\,m \end{cases}$$

13. a) ¿Cómo varía la intensidad de una onda sonora cuando la amplitud de presión se duplica? b) ¿Cómo se debe variar la amplitud de presión para aumentar la intensidad en un factor de 10 c) ¿Cómo varía la intensidad si se aumenta el nivel sonoro en 3 dB?

a) Supongamos que tenemos una amplitud inicial de presión ΔP_0, la intensidad inicial correspondiente es:

$$I_o = \frac{(\Delta P_o)^2}{2.\delta.v_{prop}}$$

Si duplicamos la diferencia de presión inicial: $\Delta P_f = 2.\Delta P_0$

$$I_f = \frac{(\Delta P_f)^2}{2.\delta.v_{prop}} = \frac{(2.\Delta P_o)^2}{2.\delta.v_{prop}} = \frac{2^2.(\Delta P_o)^2}{2.\delta.v_{prop}} = 4.\frac{(\Delta P_o)^2}{2.\delta.v_{prop}} = 4.I_o$$

Es decir, cuando se duplica las amplitudes de presión de las ondas sonoras, se cuadruplica la intensidad.

b) planteo el cociente de las intensidades:

$$\frac{\dfrac{(\Delta P_f)^2}{2.\delta.v_{prop}}}{\dfrac{(\Delta P_o)^2}{2.\delta.v_{prop}}} = \frac{I_f}{I_o} \xrightarrow{simplifico} \frac{(\Delta P_f)^2}{(\Delta P_o)^2} = 10 \rightarrow \frac{\Delta P_f}{\Delta P_o} = \sqrt{10}$$

Por lo tanto, la amplitud de presión debe aumentar en un factor $\sqrt{10}$, para que la intensidad aumente 10 veces.

c) de la expresión del nivel de intensidad despejo: $n = 10.\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \rightarrow I = I_0.10^{n/10}$

Así, supongamos dos intensidades cuyos niveles están separados por 3 dB. Su cociente es:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_0.10^{n_2/10}}{I_0.10^{n_1/10}} \xrightarrow{n_2 = n_1 + 3} = 10^{\frac{n_1+3-n_1}{10}} = 10^{3/10} \approx 2 \rightarrow I_2 = 2.I_1$$

La intensidad es el doble

Efecto Döppler

El efecto Döppler consiste en el cambio de frecuencia de una onda, cuando la fuente o el receptor de la onda se encuentran en movimiento. Es característico de este efecto que cuando una fuente de sonido se mueve a velocidades importantes, la frecuencia de los sonidos que emite se perciben distintos (más agudo al acercarse el emisor al observador, más grave al alejarse). Este efecto lo manifiestan todas las ondas, incluso las electromagnéticas (como la luz, los rayos X y las ondas de radio). Para la luz el cambio de frecuencia se percibe como un cambio de color que en el caso de alejarse la fuente del observador da un tono más rojo del normal. Por este motivo los astrónomos sabemos que el universo se encuentra en expansión, la luz características de las estrellas se ve más rojiza cuanto más lejos está la estrella (este fenómeno se llama corrimiento al rojo). Pero para que este efecto se note es necesario que la fuente se mueva a velocidades cercanas a la de la propagación de la onda (para el sonido en el aire es 340 $\frac{m}{s}$, para la luz en el vacío es 300 000 $\frac{km}{s}$, por este motivo es imposible que nada vaya tan rápido en la Tierra como para que el Döppler de la luz se note)

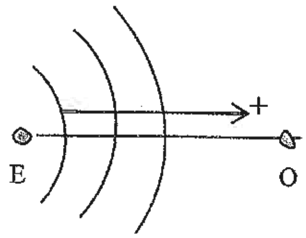
La fórmula de la variación de la frecuencia percibida por el observador f_o, respecto de la emitida por el emisor f_e, está dada por la fórmula:

$$f_O = \frac{v_S - v_O}{v_S - v_e} \cdot f_e$$

Convención de signos: se elige sentido positivo el del avance del sonido, es decir el sentido que va del emisor hacia el observador. Por lo tanto:

(♙) v_s es siempre positiva

(♙) v_e es positivo cuando el emisor se acerca al observador, negativo cuando se aleja del observador.



(♙) v_o es negativo cuando el observador se acerca al emisor, positivo cuando se aleja del emisor, o sea al revés que para el emisor, pero respetando la flecha (+) del dibujo.

Importante: hay otras convenciones, y para ellas la fórmula de Döppler puede tener diferencia de algún signo. No hay que hacerse problema por eso, uno puede usar cualquiera de las convenciones, no me ofendo si no es la mía. Pero es muy importante tener en claro una y usarla bien.

14. Un tren viaja a 30 m/s sin viento. La frecuencia de la nota emitida por el silbato de la locomotora es de 500 hz. $V_s = 344$ m/s (a 20 ºC)

a) calcular λ para las ondas sonoras:

a_1: delante de la locomotora

a_2: detrás de la locomotora

b) calcule la frecuencia del sonido que escucha un oyente estacionario

b_1: delante de la locomotora

b_2: detrás de la locomotora

Empiezo por la parte (b), calculando las frecuencias mediante la expresión del efecto Döppler. Por la convención de signos que usamos, en el caso que el tren se acerca al observador, su velocidad es $v_e = +30$ m/s (se corresponde con el caso (b) del problema anterior). Entonces

$$f_O = \frac{344\frac{m}{s}}{344\frac{m}{s} - (+30\frac{m}{s})} .500hz \cong 547{,}8\ hz$$

En tanto si la persona queda por detrás del tren, es decir si éste se aleja de la persona, tenemos $v_e = 30$ m/s (se corresponde con el caso (a) del problema anterior). Entonces

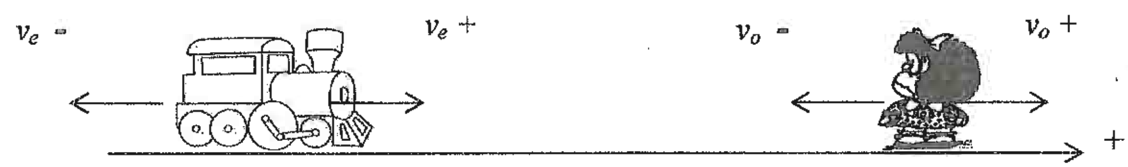
$$f_o = \frac{344\frac{m}{s}}{344\frac{m}{s} - (-30\frac{m}{s})}.500hz \approx 459,9\ hz$$

En cada caso la longitud de onda se saca de la expresión $v_{prop.} = \lambda . f$, con $v_{prop.} = 344\frac{m}{s}$.

Se obtiene: (a₁) $\lambda = \dfrac{344\frac{m}{s}}{547,8\frac{1}{s}} \cong 0,628\ m$; (a₂) $\lambda = \dfrac{344\frac{m}{s}}{459,9\frac{1}{s}} \approx 0,748\ m$

15. Una fuente de sonido tiene una frecuencia de 103 Hz y se desplaza a 30 m/s con respecto del aire. Suponiendo que la velocidad del sonido con respecto al aire en reposo es de 340 m/s, encuentre la longitud de onda y la frecuencia efectivas registradas por un observador en reposo con respecto al aire y que ve a la fuente (a) alejándose, (b) acercándose a él. Suponga ahora que la fuente está en reposo con respecto al aire y el observador se mueve a 30 m/s. Encuentre nuevamente la longitud de onda y la frecuencia efectivas registradas por el observador que ve a la fuente (c) alejándose, (d) acercándose a él. Con base en sus resultados, ¿concluye usted que carece de importancia cuál de los dos, la fuente o el observador, esté en movimiento?

Hacemos un gráfico de las 4 situaciones, donde mostramos los casos:



(a) tenemos: v_e = - 30 m/s $$f_o = \frac{340\frac{m}{s}}{340\frac{m}{s} - (-30\frac{m}{s})}.103hz = 94,65\ hz$$

(b) tenemos: v_e = + 30 m/s $$f_o = \frac{340\frac{m}{s}}{340\frac{m}{s} - (30\frac{m}{s})}.103hz \cong 112,97\ hz$$

(c) tenemos: v_o = + 30 m/s $$f_o = \frac{340\frac{m}{s} - (+30\frac{m}{s})}{340\frac{m}{s}}.103hz \cong 93,91\ hz$$

(d) tenemos: v_o = - 30 m/s $$f_o = \frac{340\frac{m}{s} - (-30\frac{m}{s})}{340\frac{m}{s}}.103hz \cong 112,08\ hz$$

Se observa que no es lo mismo que se acerque la fuente al observador, o sea éste quién se acerque a la fuente. En ambos casos aumenta la frecuencia (sonido más agudo) pero en un caso porque aumenta el numerador, y en el otro porque disminuye el divisor. De todas formas no da el mismo resultado. Para las longitudes de onda, en todos los casos, se puede usar la expresión: $v_{prop.} = \lambda . f$, con $v_{prop.} = 340 \frac{m}{s}$. Se obtiene:

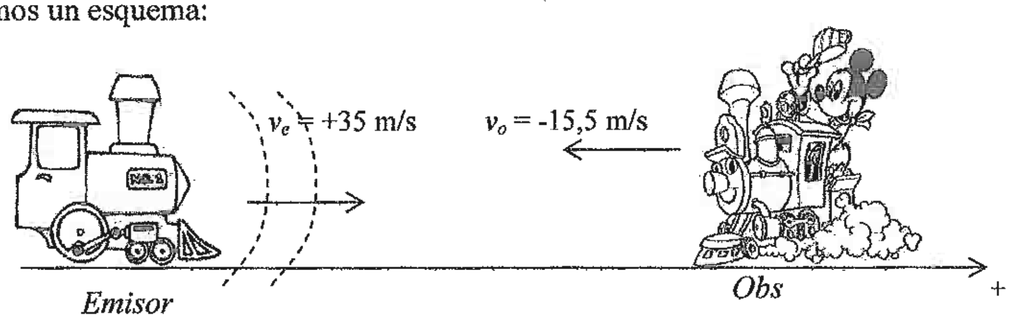
$$\text{(a) } \lambda = \frac{340 \frac{m}{s}}{94{,}65 \frac{1}{s}} = 3{,}59 m \quad \text{(b) } \lambda = \frac{340 \frac{m}{s}}{112{,}97 \frac{1}{s}} \cong 3 m \quad \text{(c) } \lambda = \frac{340 \frac{m}{s}}{93{,}91 \frac{1}{s}} = 3{,}62 m$$

$$\text{(d) } \lambda = \frac{340 \frac{m}{s}}{112{,}08 \frac{1}{s}} = 3{,}03 m$$

16. Un tren viaja a 35 m/s sin viento. La frecuencia de la nota emitida por el silbato de la locomotora es de 300 Hz. ¿Qué frecuencia percibe un pasajero de otro tren que se mueve en la misma dirección a 15,5 m/s? $V_S = 331$ m/s a 273 K

a) se acerca al primer tren b) se aleja del primer tren

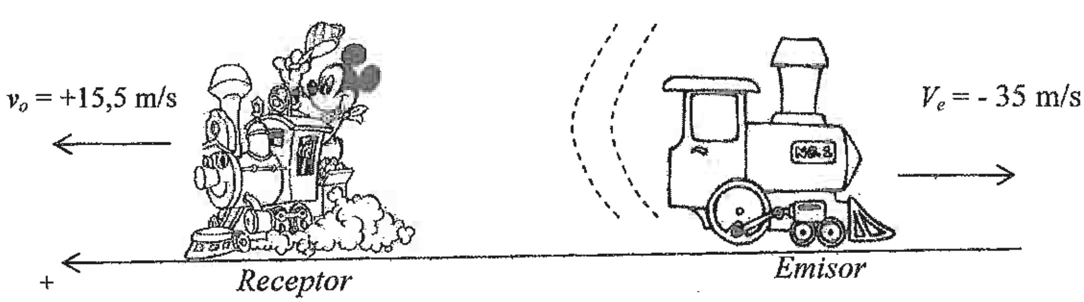
a) Hacemos un esquema:



Observar bien los sentidos de las velocidades, siempre se debe tener en cuenta el signo respecto del eje positivo (es decir el del sentido que va del emisor al observador).

Reemplazo en la fórmula del efecto Döppler: $f_o = \dfrac{331 \frac{m}{s} - (-15{,}5 \frac{m}{s})}{331 \frac{m}{s} - (+35 \frac{m}{s})} .300\ hz \approx 351\ hz$

b) en el caso en que ambos se alejen:



De nuevo, observar bien los sentidos de las velocidades, siempre se debe tener en cuenta el signo respecto del eje positivo (es decir el del sentido que va del emisor al observador), que esta vez es contrario al de la parte (a). Reemplazamos en la fórmula del efecto Döppler:

$$f_o = \frac{331\frac{m}{s} - (+15{,}5\frac{m}{s})}{331\frac{m}{s} - (-35\frac{m}{s})} .300\ hz \cong 259\ hz$$

17 **Sonar náutico**. La fuente de sonido del sistema de sonar de un barco opera con una frecuencia de 25,0 khz. La velocidad del sonido en el agua es de 1480 m/s

a) Calcular λ de las ondas emitidas por la fuente

b) calcular la diferencia en frecuencia entre las ondas emitidas directamente y las reflejadas en una ballena que viaja directamente hacia el barco a 5,85 m/s

Considerar que el barco está en reposo respecto del agua.

a) despejo la longitud de onda de la expresión: $v_{prop.} = \lambda . f$, con $v_{prop.} = 1480\frac{m}{s}$ (esta vez se trata de la propagación de las ondas sonoras en el agua):

$$\lambda = \frac{1480\frac{m}{s}}{25\ 000\ hz} = 0{,}0592\ m$$

b) para calcular esta diferencia de frecuencia, se puede plantear dos veces el efecto Döppler. La primera vez para averiguar que frecuencia recibe la ballena (tendría una fuente de sonido en reposo: el barco; y la ballena es el receptor que se acerca):

$$f_o = \frac{1480\frac{m}{s} - (-5{,}85\frac{m}{s})}{1480\frac{m}{s}} .25000\ hz \cong 25099\ hz$$

Luego debo volver a plantear el efecto Döppler, esta vez diciendo que la fuente del sonido es la ballena (porque está re-emitiendo el sonido que le llegó y por lo tanto emite una onda cuya frecuencia es la que obtuvimos del planteo del primer Döppler). Este emisor se acerca al receptor final (el barco). La recibida en el 2^{do} Döppler me dará la frecuencia recibida por el receptor final (que es el barco):

$$f_o = \frac{1480\frac{m}{s}}{1480\frac{m}{s} - (+5{,}85\frac{m}{s})} .25\ 099\ hz \cong 25198\ hz$$

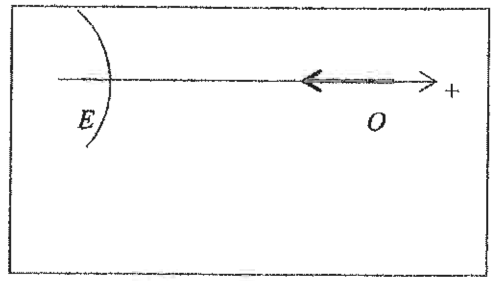
La diferencia entre la final (recibida por el barco luego de reflejarse en la ballena) y la inicial emitida por el barco es 198 *hz*.

18. ¿En qué condiciones el resultado obtenido al aplicar el efecto Döppler es aproximadamente el mismo en los siguientes casos:

(a) la fuente está en reposo con respecto al medio y el observador se aproxima a ésta con una cierta velocidad **v** (b) el observador está en reposo respecto del medio y la fuente se aproxima a él con la misma velocidad relativa **v**?

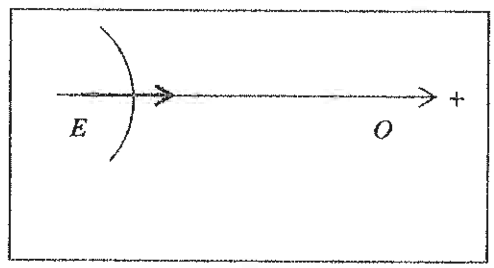
Vimos en el ejercicio 15 que cuando cualquiera de los dos se acerca al otro se nota un tono más agudo (un aumento en la frecuencia). Veamos cuánto vale la frecuencia percibida por el observador en cada caso:

① en el caso (a): tenemos $v_e = 0$ (la fuente está en reposo) y $v_o = - v$ (negativo, ya que se acerca al emisor, respetando la convención de signos que dimos). Reemplazo:



$$f_o = \frac{340\frac{m}{s} + v}{340\frac{m}{s}} . f_e$$

② en el caso (b): tenemos $v_o = 0$ (el observador está en reposo) y $v_e = v$ (positivo, ya que se acerca al emisor, respetando la convención de signos que dimos). Reemplazo:



$$f_o = \frac{340\frac{m}{s}}{340\frac{m}{s} - v} . f_e$$

Para que la frecuencia del caso (a) coincida con la del caso (b), igualo estas dos expresiones de las frecuencias percibidas por el observador:

$$\frac{340\frac{m}{s} + v}{340\frac{m}{s}} . f_e = \frac{340\frac{m}{s}}{340\frac{m}{s} - v} . f_e \xrightarrow{paso\ de\ lado} \left(340\frac{m}{s} - v\right).\left(340\frac{m}{s} + v\right) = \left(340\frac{m}{s}\right)^2$$

Del lado izquierdo tenemos el caso de factoreo de la diferencia de cuadrados:

$$\cancel{\left(340\frac{m}{s}\right)^2} - (v)^2 = \cancel{\left(340\frac{m}{s}\right)^2} \xrightarrow{despejo} v = 0$$

Es decir, para que el efecto notado sea prácticamente el mismo, es necesario que la velocidad sea aproximadamente cero. De lo contrario siempre habrá diferencia.